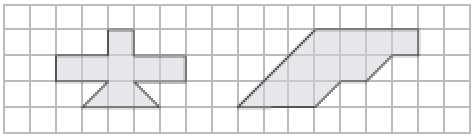
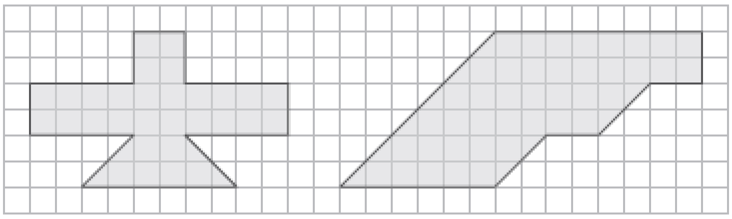
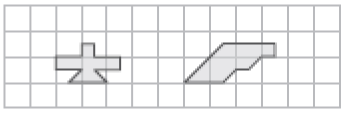
MÁS ACTIVIDADES RESUELTAS SEMEJANZA Y TEOREMA DE THALES

Construye figuras semejantes a las dadas con las siguientes razones de semejanza.



a) 2 **b) $\frac{1}{2}$**

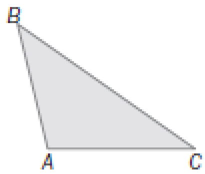




Aplicando el teorema de Tales construye un triángulo semejante al triángulo *ABC* con las siguientes razones de semejanza.

a) 4

b) $\frac{1}{3}$



a) El triángulo pedido es el de vértices *AB'C'* donde las medidas de sus lados se ampliar multiplicando por 4.

b) El triángulo pedido es el de vértices *AB"C"* donde las medidas de sus lados se reducen dividiendo por 3.

Comprueba cuáles de las siguientes parejas de triángulos dados por las medidas de sus lados, en centímetros, son semejantes o no. En su caso, indica la razón de semejanza.

a) 9, 6 y 6 13,5; 9 y 9

b) 18, 15 y 21 6, 5 y 8

a) Como se verifica la siguiente proporcionalidad $\frac{13,5}{9} = \frac{9}{6} = \frac{9}{6}$, se deduce que los dos triángulos son semejantes.

b) Como $\frac{18}{6} = \frac{15}{5} \neq \frac{21}{8}$ se deduce que los dos triángulos no son semejantes.

a) Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales ¿son semejantes?

b) Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales ¿son semejantes?

c) Dos triángulos que tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido igual, ¿son semejantes?

a) Cierto.

b) Falso.

c) Cierto.

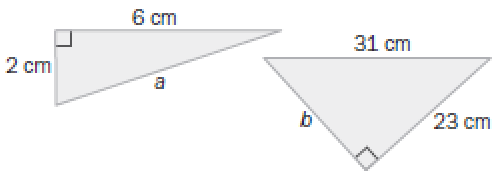
Dos ciudades *A* y *B* están representadas sobre un mapa realizado a escala 1:300 000 y en el mapa distan 3,5 cm. ¿Cuál será la distancia entre estas ciudades en la realidad?

$d = 3{,}5 \cdot 300\,000 = 1\,050\,000 \text{ cm} = 10{,}5 \text{ km}$

Calcula el lado que falta en los siguientes triángulos rectángulos.

a) $a = \sqrt{6^2 + 2^2} \simeq 6{,}32 \text{ cm}$

b) $b = \sqrt{31^2 - 23^2} \simeq 20{,}78 \text{ cm}$



Halla la apotema de un hexágono regular de lado 12,5 metros.

$a = \sqrt{12{,}5^2 - 6{,}25^2} \simeq 10{,}82 \text{ m}$

Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 17,3 centímetros de lado.

$h = \sqrt{17{,}3 - 8{,}65^2} \simeq 14{,}98 \text{ cm}$

Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes miden 15 y 23 metros, respectivamente. Calcula el área del triángulo mayor sabiendo que el área del pequeño mide 75 metros cuadrados.

La razón de semejanza es: $k = \frac{23}{15}$.

La razón entre las áreas será $k^2 = \left(\frac{23}{15}\right)^2$.

Si el área del triángulo pequeño mide 75 m^2, el área del triángulo mayor mide:

$A = 75\frac{23^2}{15^2} \simeq 176{,}33 \text{ m}^2$

La diagonal de un cuadrado mide 12 metros y el área de otro cuadrado, 725 metros cuadrados.

a) Calcula la diagonal del cuadrado mayor.

b) Calcula el área del cuadrado menor.

a) $S = 725 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{725} \simeq 26{,}926 \text{ m}$

$D = \sqrt{26{,}926^2 + 26{,}926^2} \simeq 38{,}08 \text{ m}$

b) Si el lado del cuadrado menor es a se tiene:

$\sqrt{a^2 + a^2} = 12; \quad 2a^2 = 144; \quad a^2 = 72; \quad a = \sqrt{72} \simeq 8{,}48 \text{ m}$

Por tanto, el área del cuadrado menor es: $A = 8{,}48^2 = 71{,}91 \text{ m}^2$.

Con un hilo de alambre de 64 centímetros se construye:

a) Un triángulo equilátero.

b) Un triángulo rectángulo en el que un cateto es igual a las $\frac{3}{4}$ partes del otro.

c) Un triángulo isósceles de base (lado desigual) igual a los $\frac{2}{5}$ del lado.

Calcula el área de los tres triángulos. ¿Qué observas?

a) Lado del triángulo equilátero: $l = \frac{64}{3} = 21{,}334$ cm

Hallamos la altura h: $h = \sqrt{21{,}334^2 - 10{,}667^2} \simeq 18{,}476$ cm

$S_1 = \frac{1}{2} 21{,}334 \cdot 18{,}476 \simeq 197{,}083\ \text{cm}^2$

b) Sea un cateto c y el otro $b = \frac{3}{4}c$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} c + \frac{3}{4}c + a = 64 \\ a = \sqrt{c^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \frac{7}{4}c + a = 64 \\ a = \sqrt{\frac{25}{16}c^2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \frac{7}{4}c + a = 64 \\ a = \frac{5}{4}c \end{array}\right\} \quad \frac{7}{4}c + \frac{5}{4}c = 64;\ 3c = 64$$

$c = \frac{64}{3}$ cm $\qquad b = \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{3} = 16$ cm $\qquad a = \frac{5}{4}c = \frac{5}{4}\frac{64}{3} = \frac{80}{3}$ cm

$S_2 = \frac{1}{2}\frac{64}{3} \cdot 16 \simeq 170{,}67\ \text{cm}^2$

c) Sea l la medida del lado igual y $\frac{2}{5}l$ la medida del lado desigual,

$64 = l + l + \frac{2}{5}l \qquad \frac{12}{5}l = 64 \Rightarrow l = 26{,}67$ cm

Sea h la altura del triángulo:

$h = \sqrt{26{,}67^2 - 5{,}33^2} \simeq 26{,}13$ cm $\qquad S_3 = \frac{1}{2}10{,}66 \cdot 26{,}13 \simeq 139{,}27\ \text{cm}^2$

Se observa que el área mayor corresponde al triángulo equilátero.

El perímetro de un triángulo rectángulo isósceles mide 24 centímetros. Halla la longitud de sus tres lados del triángulo.

Si el lado igual (cateto) mide x cm, entonces la hipotenusa por el teorema de Pitágoras mide $x\sqrt{2}$ cm.

El perímetro es: $x + x + x\sqrt{2} = 24;\ 2x + x\sqrt{2} = 24$

$(2 + \sqrt{2})x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{2 + \sqrt{2}} \simeq \frac{24}{3{,}41} = 7{,}04$ cm.

Luego, los lados del triángulo miden, aproximadamente,

7,04 cm; 7,04 cm y $7{,}04\sqrt{2} \simeq 9{,}92$ cm

Un delineante tiene que hacer a escala 1:120 un plano de un edificio singular de planta hexagonal regular de 17 metros de lado.

a) Halla la medida de la apotema en la realidad.

b) Calcula la medida del lado y de la apotema en el plano.

a) $a_p = \sqrt{17^2 - 8{,}5^2} \simeq 14{,}72$ m

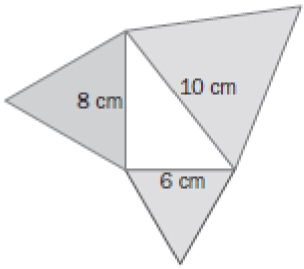
b) Si en la realidad el lado y la apotema del hexágono miden

$l = 17$ m $\qquad a = 14{,}72$ m,

en el plano a escala 1:120 medirán:

$l' = \frac{17\,000}{120} = 141{,}7$ cm $\qquad a' = \frac{14\,720}{120} = 122{,}7$ cm

Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10 centímetros se construye un triángulo equilátero. Comprueba que el área del triángulo verde es igual a la suma de las áreas de los triángulos azul y verde.



Procediendo de forma análoga a otros casos vistos se tiene que el área de un triángulo equilátero de lado *a* es:

$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Área triángulo rojo: $S_{rojo} = \frac{6^2}{4}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ cm²

Área triángulo azul: $S_{azul} = \frac{8^2}{4}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm²

Área triángulo verde: $S_{verde} = \frac{10^2}{4}\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ cm²

En efecto, se verifica que:

$25\sqrt{3} = 9\sqrt{3} + 16\sqrt{3}$, es decir,

área triángulo rojo = área triángulo verde + área triángulo azul.

Las diagonales de un rombo miden 48 y 90 centímetros. Calcula el lado del rombo.

$l = \sqrt{45^2 + 24^2} = 51$ cm

Calcula la base, la altura y la diagonal de un rectángulo sabiendo que la suma de la base y la altura es de 144 centímetros y que la base supera en 4 cm al triple de la altura.

$\left.\begin{array}{l} a + b = 144 \\ b = 3a + 4 \end{array}\right\} \ a + 3a + 4 = 144$

$4a + 4 = 144$ $\quad 4a = 140$ $\quad a = 35$ cm $\quad b = 3 \cdot 35 + 4 = 109$ cm

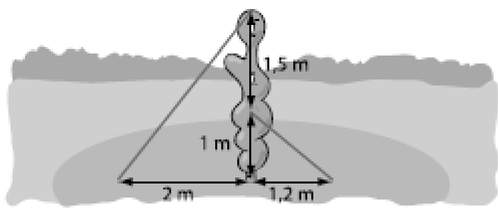
$d = \sqrt{109^2 + 35^2} \simeq 114{,}48$ cm

Se han colocado dos cables para proteger una gran escultura, como muestra la figura. ¿Cuántos metros de alambre han empleado?

$x = \sqrt{2{,}5^2 + 2^2} \simeq 3{,}2$ m

$y = \sqrt{1^2 + 1{,}2^2} \simeq 1{,}56$ m

$x + y = 3{,}2 + 1{,}56 = 4{,}76$ m de alambre



Para calcular la altura de una torre se ha medido a la misma hora su sombra y la de una persona, resultando ser de 24,5 metros y de 16 centímetros, respectivamente. Si la persona mide 178 centímetros, calcula la altura de la torre.

Por semejanza, establecemos la siguiente proporcionalidad siendo x la altura de la torre.

$$\frac{x}{24,5} = \frac{178}{16} \Rightarrow x = \frac{178 \cdot 24,5}{16} = 27,56 \text{ m}$$

Por tanto, la altura de la torre mide 27,26 m.

El plano de una casa está realizado a escala 1:110. ¿Cuánto medirá en la realidad el salón, si en el plano mide 7 centímetros de largo y 5 de ancho?

$7 \cdot 110 = 770 \text{ cm} = 7,7 \text{ m}$

$5 \cdot 110 = 550 \text{ cm} = 5,5 \text{ m}$

En la realidad, el salón mide 7,7 m de largo y 5,5 m de ancho.

Un boceto de un diseño de una alfombra mide 13 centímetros de largo por 8 de ancho y se quiere que el largo de la alfombra real mida 149,5 centímetros.

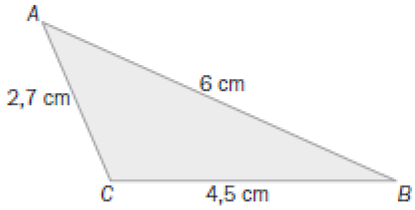
a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) ¿Cuánto medirá el ancho de la alfombra?

a) La razón de semejanza es $\frac{149,5}{13} = 11,5$.

b) Ancho: $8 \cdot 11,5 = 92$ cm

Aplica el teorema de Tales para construir un triángulo semejante al triángulo *ABC* en una semejanza de razón 2,5.



El triángulo pedido es el de vértices $A'B'C'$ cuyas medidas son:

$A'B' = 2,5 \cdot 2,5 = 6,25$ cm,

$B'C' = 6 \cdot 2,5 = 15$ cm y

$A'C' = 2,7 \cdot 2,5 = 6,75$ cm

La maqueta de una presa tiene 2,5 metros de largo y 0,7 de ancho. ¿Cuáles serán las medidas reales sabiendo que está realizada a escala 1:3 800?

Las medidas reales son: largo: $2,5 \cdot 3800 = 9500$ m, ancho: $0,7 \cdot 3800 = 2660$ m.